

**Застосування інтеграла до обчислення
площ геометричних фігур**

439°. Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

1) $y=x^2$; $x=0$; $x=2$; $y=0$;

2) $y=x^3$; $x=1$; $y=0$;

3) $y=2\cos x$; $y=0$; $x=-\frac{\pi}{2}$; $x=\frac{\pi}{2}$;

4) $y=1-x^2$; $y=0$;

5) $y=x^2-4x$; $y=0$; $x=-2$;

6) $y=x^2+2x$; $y=0$; $x=2$;

7) $y=\sqrt{x}$; $x=1$; $x=4$; $y=0$;

8) $y=\sqrt{x-1}$; $x=5$; $y=0$.

440°. Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

1) $y=x^3$; $x=0$; $x=1$; $y=0$;

2) $y=x^2$; $x=2$; $y=0$;

3) $y=2\sin x$; $y=0$; $x=0$; $x=\pi$;

4) $y=x^2-1$; $y=0$; $x=2$;

5) $y=4-x^2$; $y=0$;

6) $y=\sqrt{x}$; $x=4$; $x=9$; $y=0$.

441. Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

1) $y=\sin\frac{x}{2}$; $y=0$; $x=\frac{\pi}{2}$; $x=\pi$;

2) $y=\cos 2x$; $y=0$; $x=-\frac{\pi}{4}$; $x=\frac{\pi}{4}$;

3) $y=|\sin x|$; $y=0$; $x=\pi$; $x=\frac{4\pi}{3}$;

4) $y=\sqrt{|x|}$; $y=0$; $x=-4$; $x=-1$.

442. Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

1) $y=\sin 2x$; $y=0$; $x=0$; $x=\frac{\pi}{2}$;

2) $y=\cos\frac{x}{2}$; $y=0$; $x=-\pi$; $x=-\frac{\pi}{3}$;

$$3) y = |\cos x|; y=0; x=\frac{\pi}{2}; x=\frac{5\pi}{6};$$

$$4) y = \sqrt{|x|}; y=0; x=-9; x=-1.$$

443. Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

$$1) y = \begin{cases} 2 \cos x, & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0 \\ 2-x, & 0 < x \leq 2 \end{cases} \text{ і } y=0;$$

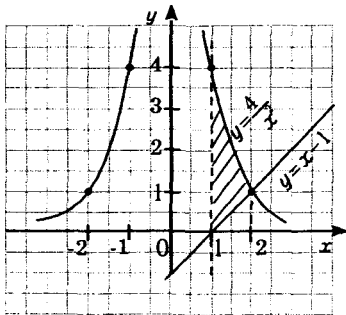
$$2) y = \begin{cases} 4 - \frac{2}{\cos^2 x}, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ 2+x, & -2 \leq x < 0 \end{cases} \text{ і } y=0.$$

444. Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

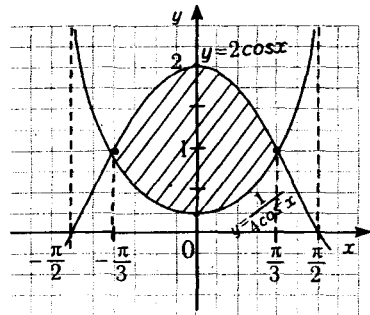
$$1) y = \begin{cases} 2+x, & -2 \leq x \leq 0 \\ 2 \cos x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ і } y=0;$$

$$2) y = \begin{cases} \frac{1}{\sin^2 x} + 2, & \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1+x, & -1 \leq x < 0 \end{cases} \text{ і } y=0.$$

445°. Знайти площу заштрихованої фігури, зображеної на: 1) мал. 12; 2) мал. 13.

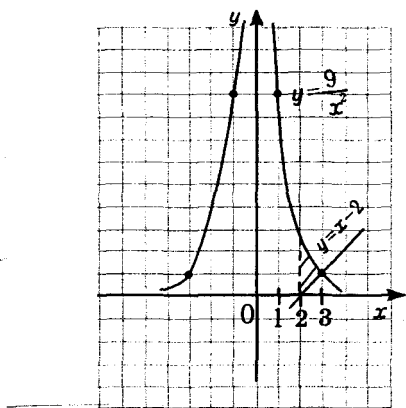


мал. 12

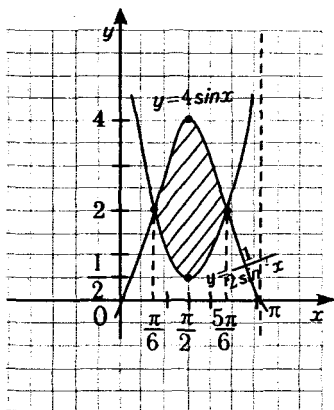


мал. 13

446°. Знайти площу заштрихованої фігури, зображеної на: 1) мал. 14; 2) мал. 15.



мал. 14



мал. 15

447. Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

- | | |
|-------------------------|---------------------------------|
| 1) $y=2x^2$ і $y=2x$; | 2) $y=2-x^2$ і $y=-x$; |
| 3) $y=2x^2$ і $y=x+1$; | 4) $y=2x^2$ і $y=4-2x^2$; |
| 5) $y=3-x^2$ і $y=2$; | 6) $y=x^2+2x$; $y=3$ і $x=0$. |

448. Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

- | | |
|-------------------------|---------------------------------|
| 1) $y=0,5x^2$ і $y=x$; | 2) $y=3-x^2$ і $y=2x$; |
| 3) $y=x^2$ і $y=4x-3$; | 4) $y=x^2$ і $y=2-x^2$; |
| 5) $y=5-x^2$ і $y=1$; | 6) $y=x^2+3x$; $y=4$ і $x=0$. |

449. Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

- 1) $y=\sin x$, $y=\cos x$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{4}$;
- 2) $y=3\sin x$, $y=-2\sin x$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$;
- 3) $y=\cos 2x$, $y=\sin x$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{6}$;
- 4) $y=\sqrt{x}$ і $y=\frac{x}{2}$;
- 5) $y=\sqrt{x+4}$ і $y=0,25x+1$;
- 6) $y=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$, $x=-\frac{3}{4}$, $x=0$, $y=0$.

450. Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

1) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{2}$;

2) $y = \cos x$, $y = -2\cos x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$;

3) $y = \sqrt{x}$ і $y = \frac{x}{3}$; 4) $y = \sqrt{x-2}$ і $y = 0,5x-1$.

451. Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

1) $y = 2 - x^2$; $y = x$ і $y = 0$, якщо $x \geq 0$;

2) $y = \sqrt{x-1}$; $y = \sqrt{5-x}$ і $y = 0$.

452. Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

1) $y = 3 - x^2$; $y = 2x$ і $y = 0$, якщо $x \geq 0$;

2) $y = \sqrt{x+2}$; $y = \sqrt{4-x}$ і $y = 0$.

453. Використовуючи геометричний зміст інтеграла, знайти:

1) $\int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} dx$;

2) $\int_{-2}^2 (3 + \sqrt{4-x^2}) dx$.

454. Використовуючи геометричний зміст інтеграла, знайти:

1) $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$;

2) $\int_{-3}^3 (3 - \sqrt{9-x^2}) dx$.

455. Знайти площу фігури, обмеженої параболою $y = 2x - x^2$, дотичною, проведеною до даної пара-

боли в точці $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$ та віссю абсцис.

456. Знайти площу фігури, обмеженої параболою $y = 4x - x^2$, дотичною, проведеною до даної параболи в точці $(1; 3)$ та віссю ординат.

457. Знайти площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = |x-1|$ і $y = \frac{x}{2}$.

458. Знайти площу фігури, обмеженої графіками функцій: $y=x^2$ і $y=2-|x|$.
459. При якому значенні a площа фігури, обмеженої параболою $y=3x^2$ та прямими $y=0$, $x=a-1$ та $x=a+1$ набуває найменшого значення?
- 460°. Знайти площу фігури, обмеженої лініями:
- 1) $y=e^x$, $x=0$, $x=3$, $y=0$;
 - 2) $y=3^x$, $x=-1$, $x=0$, $y=0$;
 - 3) $y=1+e^x$, $x=-2$, $x=2$, $y=0$;
 - 4) $y=2^x \ln 2$, $x=0$, $x=2$, $y=0$.
461. Знайти площу фігури, обмеженої лініями:
- 1) $y=e^x$, $x=-2$, $x=0$, $y=0$;
 - 2) $y=2^x$, $x=0$, $x=1$, $y=0$;
 - 3) $y=e^x+2$, $x=-1$, $x=1$, $y=0$;
 - 4) $y=3^x \ln 3$, $x=0$, $x=1$, $y=0$.
462. Знайти площу фігури, обмеженої лініями:
- 1) $y=e^{2x-3}$, $x=0$, $x=2$, $y=0$;
 - 2) $y=3^x$, $y=9^x$, $x=1$;
 - 3) $y=e^x$, $y=1$, $x=2$;
 - 4) $y=e^x$, $y=2-e^x$, $x=2$;
 - 5) $y=2^{-x}$, $y=4^x$, $y=4$;
 - 6) $y=2^x$, $x=0$, $y=2$.
463. Знайти площу фігури, обмеженої лініями:
- 1) $y=e^{2x-1}$, $x=1$, $x=2$, $y=0$;
 - 2) $y=e^x$, $y=e^{2x}$, $x=1$;
 - 3) $y=e^{-x}$, $y=1$, $x=-1$;
 - 4) $y=3^{-x}$, $y=3^x$, $y=3$.
- 464°. Знайти площу фігури, обмеженої лініями:
- 1) $y = \frac{1}{x}$, $x=1$, $x=3$, $y=0$;
 - 2) $y = -\frac{2}{x}$, $x=-4$; $x=-1$; $y=0$.

465. Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

1) $y = \frac{4}{x}$, $x=1$, $x=5$, $y=0$;

2) $y = -\frac{1}{x}$, $x=-5$; $x=-1$; $y=0$.

466. Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

1) $y = \frac{2}{x} + 1$, $x=1$, $x=2$, $y=0$;

2) $y = \frac{4}{x}$, $x=1$, $y=1$;

3) $y = \frac{7}{x}$, $x^2 - 8x + 7 = 0$, $y=0$;

4) $y = \frac{3}{x}$, $y=3$, $x=3$;

5) $y = \frac{5}{x}$, $y=6-x$;

6) $y = \frac{2}{x}$, $y=x-1$, $x=4$;

7) $y=x^2$, $y = \frac{1}{x}$, $x=3$;

8) $y = \frac{8}{x}$, $y = \sqrt{x}$, $x=9$.

467. Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

1) $y = \frac{3}{x} + 2$, $x=1$, $x=3$, $y=0$;

2) $y = \frac{2}{x}$, $x=1$, $y=0,5$;

3) $y = \frac{5}{x}$, $x^2 - 6x + 5 = 0$, $y=0$;

4) $y = \frac{4}{x}$, $y=4$, $x=4$;

5) $y = \frac{8}{x}$, $y=6-x$;

6) $y = \frac{6}{x}$, $y=x-1$, $x=4$.

468. Знайти a з рівняння $\int_1^{12} \frac{1}{x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} dx$.

469. Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

1) $y = \frac{1}{x-1}$, $x=2$, $x=5$, $y=0$;

2) $y = \frac{1}{2x-5}$, $x=3$, $x=7$, $y=0$.

470. Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

1) $y = \frac{1}{x+1}$, $x=0$, $x=3$, $y=0$;

2) $y = \frac{1}{3x-2}$, $x=1$, $x=4$, $y=0$.

471. При якому значенні $a > 0$ пряма $x=7$ ділить площу фігури, що обмежена графіком функції

$y = \frac{4}{x}$ та прямими $y=0$, $x=2$, $x=7+a$ навпіл?

472. При якому значенні $a > 0$ пряма $x=5$ ділить площу фігури, що обмежена графіком функції

$y = \frac{6}{x}$ та прямими $y=0$, $x=5-a$, $x=8$ навпіл?

473. При якому значенні b пряма $x=b$ ділить площу фігури, обмеженої графіком функції $y = \frac{12}{x}$ та прямими $y=0$, $x=1$, $x=9$ навпіл?

474. При якому значенні b пряма $x=b$ ділить площу фігури, обмеженої графіком функції $y = \frac{8}{x}$ та прямими $y=0$, $x=1$, $x=4$ навпіл?

475. Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

1) $y = x^3$, $x=1$, $x=8$, $y=0$;

2) $y = x^\pi$, $x=1$, $x=\pi$, $y=0$;

3) $y = x^{\sqrt{3}}$, $y=0$, $x=1$;

4) $y = x^{\sqrt{2}}$, $y = \frac{1}{x}$, $x = \frac{1}{2}$;

5) $y = x^{\sqrt{7}}$, $y = x^{\sqrt{2}}$;

6) $y = x^2$, $y = x^{\sqrt{11}}$.

476. Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

1) $y = x^4$, $x=1$, $x=16$, $y=0$;

2) $y = x^e$, $x=1$, $x=e$, $y=0$;

3) $y = x^{\sqrt{5}}$, $y=0$, $x=1$;

4) $y = x^{\sqrt{7}}$, $y = x^3$.